



TITLE:

# Forcing ProblemとInstability Problem (統計流体力学の研究)

AUTHOR(S):

田中, 浩

---

CITATION:

田中, 浩. Forcing ProblemとInstability Problem (統計流体力学の研究).  
数理解析研究所講究録 1976, 275: 121-139

ISSUE DATE:

1976-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105983>

RIGHT:

## Forcing Problem と Instability Problem

電波研究所 田中 浩

### 1. はじめに

波動と渦と乱れという3つの概念はそれぞれの定義をすることは可能であるが、それらの区別が判然としない場合も多い。この解説では特に波動と乱れに関して、密度(温度)成層をした流体を例にあげて説明したいと考えている。安定な密度成層をした流体中に何らかの衝撃を加えると浮力の差による復元力が働いて重力波が発生する。この重力波が媒質中を伝播するとき、媒質の平均場の状態によっては種々の興味ある現象が引き起こされる。ここではそのような興味ある問題の1つである重力波の *critical level* 附近における振舞を取りあげてみたい。この場合、*critical level* というのは媒質が平均速度勾配をもつとき、その媒質の平均速度と重力波の位相伝播速度が一致する *level* をさす。同時にこの *critical level* という用語は不安定性の問題にも使用される。一般に

不安定性の問題は bifurcation の選択の問題であり、一方強制問題は一義的にさまる問題である。この解説では特に強制問題に重点を置いて以下詳細に述べてみたい。

## 2. 内部重力波について

内部重力波は安定成層流体中に生じる復元力のために発生する。この復元力の特徴的な周波数を決定するものが Brunt - Väisälä 周波数 ( $N$ ) で、これは流体の密度 ( $\rho$ ) と密度勾配 ( $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ ) できまる。すなわち

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2-1)$$

ここで  $g$  は重力定数、 $z$  は鉛直方向の座標である。

Boussinesq 近似をすれば、鉛直方向の速度成分は

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + n^2 w = 0, \quad (2-2)$$

ただし

$$n^2 = k^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) = \frac{N^2}{c^2} - k^2$$

となる。ここで  $\omega, k$  はそれぞれ波動の周波数および水平方向の波数を、また  $c = \omega/k$  は位相伝播速度をあらわす。波動は  $e^{i(kx - \omega t)}$  であると仮定している。ここで  $n$  は鉛直方向の波数に対応する。 $n^2 > 0$  ならば  $w$  は  $z$  方向に正弦的になる。こ

れは鉛直方向にも波動が伝播できることを意味し、これを普通内部重力波と呼ぶ。 $n^2 < 0$  ならば  $w$  は指数函数になり波動として鉛直方向に伝播できない。 $n^2 > 0$  となるには (2-3) より  $\omega < N$  となる必要がある。すなわち周波数が Brunt-Väisälä 周波数より小さい場合だけ鉛直伝播できる。

次に平均速度勾配が存在する場合は

$$n^2 = \frac{N^2}{(U-C)^2} - \frac{U_{zz}}{U-C} - k^2 \quad (2-4)$$

と書ける。ここで  $U$  は平均流をあらわす。(2-4) を使った場合、方程式 (2-2) は Scorer 方程式あるいは Taylor-Goldstein 方程式と呼ばれ、安定成層流体中の不安定性の問題で見かけられる。 $U \neq C$  ならば問題はないが、 $U = C$  となる高度では特異性があらわれる。

強制問題を扱うため、いま波源がどこか遠方に存在して、そこから伝播してきた内部重力波が  $U = C$  の level 附近でどのように振舞うかを調べる。特異点をもつ強制問題の解決が10年以前にはほとんど手がつけられていなかったというのは不思議なものである。

### 3. 内部重力波の critical level 附近での振舞

#### (i) Richardson 数 $\gg 1/4$ の場合

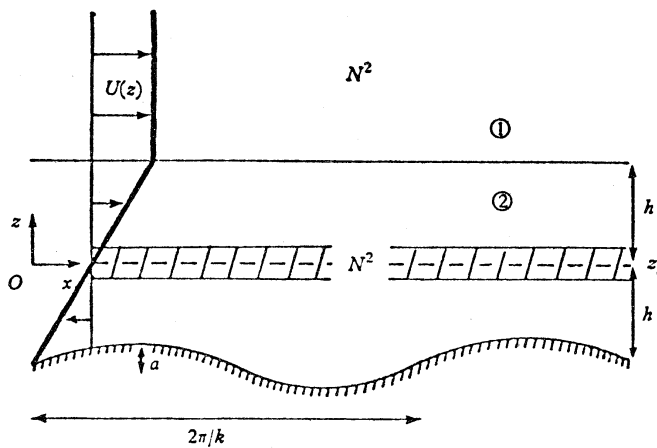
すでに述べたように，内部重力波の位相速度と媒質の平均速度が等しくなる高度を *critical level* と呼ぶ。いま *critical level* での Richardson 数を  $1/4$  より大きいとすると，不安定化して乱れになることはあり得ない (Miles, 1961)。

Bretherton<sup>(1966)</sup> の WKB 近似では，内部重力波が *critical level* に近づくにつれて，鉛直波数が無限に大きくなるとともに群速度の鉛直成分が 0 に近づく。このようにして内部重力波は *critical level* の直下で平均場に凍結される。

*Critical level* の近傍で何が起きているかについては Booker & Bretherton (1967) によって詳細に研究された。人々が *critical level* の問題で常にこの研究を引用するのも当然と思われるほど，数学的に明確な形式で *critical level* 附近の内部重力波の振舞が予見されている。いま Brunt-Väisälä 周

波数を全層で一定とし，平均風速に関しては第1図に示されるように

$$\begin{aligned} U(z) &= U_z(z-h) \\ &\quad (0 < z < 2h) \\ &= U_z h \\ &\quad (z > 2h) \end{aligned} \quad (3-1)$$



第1図 強制問題に使われる安定層

のごとく設定する。流体の下限(地面)を $z=0$ として上限は無  
限とする。また流体は $t=0$ で静止してゐるとして

$$t < 0 : w = 0 \quad (\text{everywhere}) \quad (3-2)$$

また  $t > 0$  では

$$t > 0 : w = a \cos kx \quad (z=0 \text{ で}) \quad (3-3)$$

が下限の境界条件となる。上端の境界条件は

$$t > 0 : w \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty) \quad (3-4)$$

と仮定する。

微小な波動擾乱  $w(x, z, t)$  に対する線型化された重  
力波の基礎方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (w_{xx} + w_{zz}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) (U_{zz} w_x) + N^2 w_{xx} = 0 \quad (3-5)$$

となる。独立変数を無次元化するために

$$\xi = x/h, \quad \zeta = (z-h)/h, \quad \tau = U_2 t$$

のごとく,  $\xi, \zeta, \tau$  を導入する。また無次元化された波数と  
位相速度は  $\kappa = kh, \quad \gamma = C/U_2 h$

と書ける。一般的に  $\kappa > 0$  とできる。また基本場の Richardson  
数は  $\bar{R}_i \equiv \mu^2 + 1/4 = N^2/U_2^2$  で定義される。まず  $\xi$  方向  
には正弦波的な擾乱を仮定する。また時間に関してはラプラス  
変換をおこなう。これらを数式で表現すると

$$w(\xi, \zeta, \tau) = \text{Re} [\tilde{w}(\zeta, \tau) e^{i\kappa\xi}] \quad (3-6)$$

$$\hat{w}(z, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{w}(z, \tau) e^{i\gamma\tau} d\tau \quad (3-7)$$

と表現できる。ただしラプラス変換(3-7)は、積分が収束するには  $\text{Im}(\gamma) > 0$  であることが必要である。第1図に示されている Region 1 と Region 2 における基礎方程式のラプラス変換は、(3-6)と(3-7)を使って(3-5)から

$$\hat{w}_{zz} + \left\{ \frac{\bar{R}_i^2}{(1-\gamma)^2} - \kappa^2 \right\} \hat{w} = 0 \quad (z > 1: \text{Region 1}) \quad (3-8)$$

$$\hat{w}_{zz} + \left\{ \frac{\bar{R}_i^2}{(z-\gamma)^2} - \kappa^2 \right\} \hat{w} = 0 \quad (-1 < z < 1: \text{Region 2}) \quad (3-9)$$

となる。Region 1 と Region 2 の境界 ( $z=1$ ) における接続条件として、 $\hat{w}$  が連続、圧力が連続を仮定すると

$$\left. \begin{aligned} \hat{w}_1 &= \hat{w}_2 \\ \hat{w}_{1z} - \hat{w}_{2z} + \frac{1}{1-\gamma} \hat{w} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

と書ける。ここで  $\hat{w}_1, \hat{w}_2$  はそれぞれ Region 1, Region 2 における  $\hat{w}$  の値であり、添字  $z$  は微分を示す。Region 1 の上端と Region 2 の下端のラプラス変換された境界条件はそれぞれ

$$\hat{w} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty) \quad (3-11)$$

$$\hat{w} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\kappa\gamma} \quad (z=-1) \quad (3-12)$$

となる。条件(3-12)における  $\gamma=0$  は極(pole)で、無限に長い時間にかたてて波源を設定したためである。もし波源が  $t_0$  後に除かれるとすれば、(3-12)における  $1/i\kappa\gamma$  のかわりに

$$\frac{1}{i\kappa\gamma} (1 - e^{-i\kappa\gamma t_0})$$

で置きかえられ、複素 $\gamma$ 面上に特異点は存在しない。 $\gamma \rightarrow \infty$ における定常解の特異性は、境界条件(3-12)の極に関係しており、このことは波源が無限に存在し続けることで引き起こされる。

Region 1 では方程式(3-8)の解のうち、境界条件を満足するものは

$$\hat{w} = A_1 e^{im\zeta} \quad (3-13)$$

と書ける。ただし

$$m = \left\{ \frac{\bar{R}_i^2}{(1-\gamma)^2} - \kappa^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3-14)$$

(3-14)で  $\text{Im}(\gamma) > 0$  のとき  $\text{Im}(m) > 0$  となる。また  $\text{Im}(\gamma) > 0$  はラプラス変換(3-7)の収束条件にもなっている。このような条件のもとに、解(3-13)は境界条件(3-11)をみたす。

Region 2 では解の一般形は

$$\hat{w} = (\zeta - \gamma)^{\frac{1}{2}} \{ A_2 I_{i\mu}(\kappa\zeta - \kappa\gamma) + B_2 I_{-i\mu}(\kappa\zeta - \kappa\gamma) \} \quad (3-15)$$

と書ける。ここで  $I_{i\mu}$ ,  $I_{-i\mu}$  は第1次の変形ベッセル函数である。定数  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  を2つの接続条件(3-10)と境界条件(3-12)より求めることができる。いま便宜上

$$I'_{i\mu}(q) \equiv \frac{d}{dq} I_{i\mu}(q)$$

$$q_1 \equiv \kappa(1-\gamma), \quad q_2 \equiv \kappa(-1-\gamma)$$

$$Q(\gamma) \equiv \left\{ \frac{1}{2} + im(1-\gamma) \right\} \{ I_{i\mu}(q_2) I_{-i\mu}(q_1) - I_{-i\mu}(q_2) I_{i\mu}(q_1) \} \\ + q_1 \{ I'_{i\mu}(q_1) I_{i\mu}(q_2) - I'_{-i\mu}(q_1) I_{i\mu}(q_2) \}$$



と定義すると

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i\mu}{i\kappa\gamma} \frac{1}{Q} \left( \frac{1-\gamma}{-1-\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-16)$$

$$A_2 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\kappa\gamma} \frac{1}{Q} \left[ \left\{ \frac{1}{2} + i\mu(1-\gamma) \right\} I_{-i\mu}(q_1) - q_1 I'_{-i\mu}(q_2) \right] \div (-1-\gamma)^{\frac{1}{2}} \quad (3-17)$$

$$B_2 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\kappa\gamma} \frac{1}{Q} \left[ \left\{ \frac{1}{2} + i\mu(1-\gamma) \right\} I_{i\mu}(q_1) - q_1 I'_{i\mu}(q_2) \right] \div (-1-\gamma)^{\frac{1}{2}} \quad (3-18)$$

のように決められる。以上のようにして Region 1 および Region 2 における解を求めることができた。このようにして求められた解は  $\hat{w}(\gamma, z)$  であるから,  $w(\xi, z, \tau)$  を求めようとするれば, ラプラス<sup>逆</sup>変換

$$w(\xi, z, \tau) = \text{Re} \left[ e^{i\kappa\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(\gamma, z) e^{-i\kappa\gamma\tau} d\gamma \right] \quad (3-19)$$

を計算すればよい。しかしながら  $\hat{w}(\gamma, z)$  は一般には極や枝点(線)などの特異点をもつので, それに応じて積分路を選択せねばならないので計算はかなり面倒になる。

ラプラス逆変換 (3-19) の  $\tau > 0$  の場合の積分を  $\tau$  の任意の値に対して求める試みはまず絶望的である。しかし  $\tau$  が十分大きいところではいくつかの漸近的な解を得ることができ。

(3-19) の被積分函数の特異点を列举すると次のよう

になる。

(a)  $\gamma=0$ , 極 (境界条件 (3-12) より)

(b)  $\gamma=-1$ , 岐点 ( $q_2=0$  より)

(c)  $\gamma=1$ , 岐点 + 真性特異点 ( $q_1=0, m \rightarrow \infty$  より)

(d)  $\gamma=1 \pm \bar{R}_i/\kappa$ , 岐点 ( $m=0$  より)

(e)  $\gamma=\zeta, |\zeta|<1$ , 岐点 ( $(\zeta-\gamma)^{\frac{1}{2}} I_{\pm i\mu}[\kappa(\zeta-\gamma)]=0$  より)

さらに  $Q=0$  となる極が存在するはずである。しかしこれらの極を全てみつけることは困難である。たゞ  $\bar{R}_i$  が  $1/4$  より大きい場合には逃げ道がある。というのは Howard (1961) によって証明されたように,  $\bar{R}_i > 1/4$  ならば不安定波動は存在し得ないということである。このことは  $\text{Im}(\gamma) > 0$  の領域には  $Q=0$  となる極はないことに対応する。  $\gamma \rightarrow \infty$  のときは  $\text{Im}(\gamma) = 0$  の近傍以外では, 被積分函数は十分小さいため,  $\text{Im}(\gamma) < 0$  で  $Q=0$  の零点があってもその積分への寄与は無視できる。たゞしこのような議論は線型理論の範囲でしか意味をもたない。

特異点 (e) が他のどの特異点とも一致しないならば,

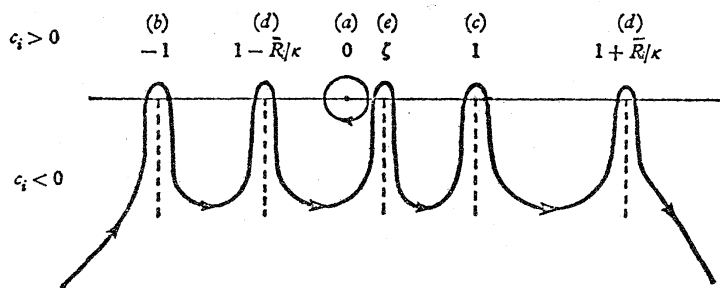


図21 図 ラプラス逆変換式 (3-19) における  $\gamma > 0$  の場合の積分路

第2図のような積分路をとることができる。まず  $\tau \rightarrow \infty$  に対応する定常解を求めてみよう。この場合は(3-19)の積分には  $\gamma=0$  の極のみが寄与する。すなわち積分の値は極の residue に  $2\pi i$  をかけたものに等しい。よって定常解は

$$w(\xi, \zeta, \tau) \rightarrow \text{Re} [\sqrt{2\pi} i \kappa \lim_{\gamma \rightarrow 0} (\gamma \hat{w}(\gamma)) e^{i\kappa \xi}] \quad (3-20)$$

で与えられる。これを Region 1 と Region 2 でそれぞれ具体的に書くと、

$$w(\xi, \zeta, \tau) = \text{Re} \left[ -\frac{2\mu a}{Q(0)} \exp\{i(\bar{R}^2 - \kappa^2)\zeta + i\kappa \xi\} \right] \dots \text{Region 1} \quad (3-21)$$

$$w(\xi, \zeta, \tau) = \text{Re} [e^{i\kappa \xi} \zeta^{\frac{1}{2}} \{A'_2(0) I_{-\frac{1}{2}}(\kappa \zeta) + B'_2(0) I_{-\frac{1}{2}}(\kappa \zeta)\}] \dots \text{Region 2} \quad (3-22)$$

ただし  $A'_2(0) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} (\gamma A_2(\gamma))$ .

(3-21) は定常的に上方伝播する波動をあらわしている。ただし波数が  $\bar{R} < \kappa$  となると、Region 1 と Region 2 の境界における平均速度のキーンのために Region 1 では外部波となって伝播しなくなる。(3-22) の第1項は上方伝播する波動をあらわしている。変形ベッセル函数は原点近傍で

$$I_{\frac{1}{2}}(\eta) \sim \eta^{\frac{1}{2}} \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} \quad (3-23)$$

と近似される。この近似式が  $\eta=0$  を境いにしてどのように変化しているかを調べてみよう。 $\eta$  が含まれているのは  $\eta^{\frac{1}{2}}$  とし

てであるから,  $q > 0$  および  $q < 0$  のときに  $q^{i\mu}$  がどのようなようになるか調べればよい。その結果は

$$q^{i\mu} = \begin{cases} e^{i\mu \ln |q|} & q > 0 \\ -ie^{\mu\pi} e^{i\mu \ln |q|} & q < 0 \end{cases}$$

となる。すなわち  $q > 0$  のときの絶対値が  $q < 0$  のときのそれより  $e^{-\mu\pi}$  だけ小さくなる。この結果を (3-22) の第1項にあてはめると  $z=0$  より上で  $|w|$  が  $e^{-\mu\pi}$  だけ小さいことになる。いま  $z=0$  は critical level であるから, 結局上方に伝播している波動は critical level より上には, もし  $\mu$  が十分大きければほとんど透過できないことになる。(3-22) の第2項は下方に伝播する波動をあらわしているが, やはり critical level を境にして下方では上方より  $e^{-\mu\pi}$  だけ  $|w|$  が小さくなる。このことはもし波源が critical level の下方だけに存在して, 上には存在しないとすれば, critical level の上側には運動がほとんど存在しないことを意味する。

特異点 (b), (c), (d) は  $U_z$  が不連続のために発生するものであって, もっと現実的な  $U(z)$  をとれば消えてしまう。その意味でこれらの特異性のために現われる非定常攪乱は物理的には重要でない。いずれにしてもこれらの攪乱は  $\tau \rightarrow \infty$  で消えてしまう。

特異点 (e) のために生じる攪乱は遷移的 (transient) な

波動で、物理的に興味があるので詳細に調べてみたが、紙数の都合で残念ながら省略する。

運動が水平的である場合のことを述べておく。すなわち波数  $k \ll 1$  に対応する場合である。最終的な定常状態  $\sigma=0$  に対して  $g_1, g_2$  は小さくなり、かつ  $m \sim \bar{R}_i = (\mu^2 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$  となる。その際  $-\pi < \theta < \pi$  の範囲で  $I_{i\mu}(\theta)$  は (3-23) によって近似されるので、

$$Q(0) \sim \frac{1}{|\Gamma(i\mu+1)|^2} \left\{ \left( \frac{1}{2} + i(\mu^2 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \right) (e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) + i\mu (e^{\mu\pi} + e^{-\mu\pi}) \right\} \quad (3-24)$$

となる。もし  $\mu$  が 1 より大きいと  $e^{\mu\pi} \gg e^{-\mu\pi}$  だから

$$\begin{aligned} A'_2 &\sim \frac{a}{\sqrt{2\pi}k} \Gamma(i\mu+1) \\ B'_2 &\sim \frac{a}{\sqrt{2\pi}k} \Gamma(-i\mu+1) \frac{\frac{1}{2} + i(\mu^2 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} - i\mu}{\frac{1}{2} + i(\mu^2 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} + i\mu} \end{aligned} \quad (3-25)$$

したがって、上方伝播波にともなうエネルギー・フラックス (またはレイノルズ応力) の下方伝播波にともなうエネルギー・フラックスに対する比は critical level の上側 (しかし Region 2) では

$$\frac{|B'_2|^2}{|A'_2|^2} = \frac{(\mu^2 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} - \mu}{(\mu^2 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} + \mu} \sim \frac{1}{16\mu^2} \quad (3-26)$$

となる。一方 critical level の下側ではその比は

$$\frac{|B'_2|^2}{|A'_2|^2} e^{-2\mu\pi} \sim \frac{1}{16\mu^2} e^{-2\mu\pi} \quad (3-27)$$

もし  $\mu > 1$  ならば critical level は非常に有効な吸収壁となる。

#### (ii) Richardson 数 $< 1/4$ の場合

Booker & Bretherton の研究の空白を埋めるものとして、Richardson 数が  $1/4$  より小さい場合の計算を Jones (1968) が行った。この計算の結果、入射波のエネルギー・フラックスよりも反射波のそれが多い場合が発見された。この現象は over-reflexion と呼ばれ、入射波が平均流からエネルギーを奪うために起こる。

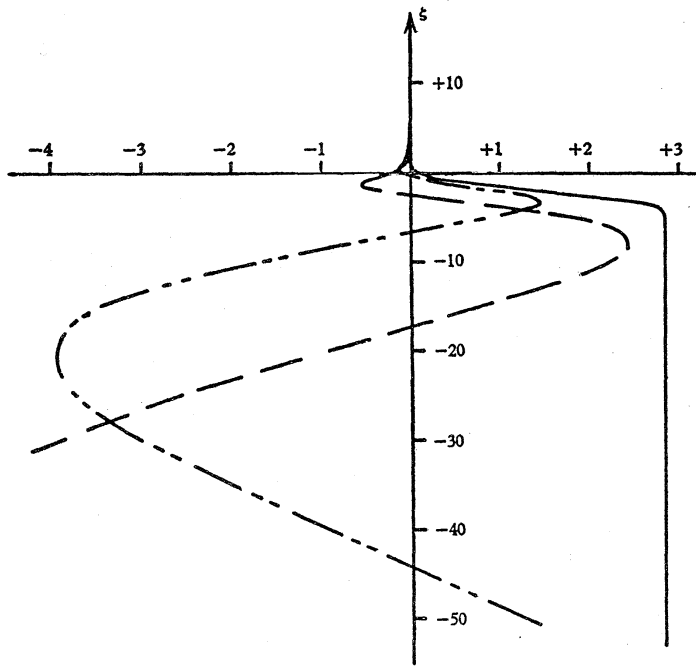
Lindzen (1974) は Jones (1968) の計算に関連して、波源が存在しなくても  $R$  が十分小さければ不安定攪乱だけでなく、中立波も critical level から放射されることを示した。

#### (iii) Critical level における粘性の影響

Hazel (1967) は critical level 近傍での粘性と熱伝導の効果調べた。粘性と熱伝導性を導入すると、方程式は 6 階の微分方程式になるので、もはや特異性は存在しない。

計算の結果、Booker & Bretherton の場合と同じく、critical level を通過する波動の振巾は  $e^{\mu\pi}$  だけ減衰すること

がたしめられた。完全な解は第3図に示される。レイノルズ応力も critical level から少し下では一定で、それから critical level に向けて直線的に減少する。レイノルズ応力の  $\zeta = -\infty$  と  $\infty$  での比は  $e^{2\pi\mu}$  にほとんど一致する。



第3図 実線 = レイノルズ応力  
鎖線 =  $w$  の虚数部  
2点鎖線 =  $w$  の実数部

数値計算の結果から、粘性の影響は critical level のごく近傍の critical layer の中でのみ重要である。粘性の存在によってできる critical layer は  $\zeta=0$  より下側が上側より厚い。計算によれば  $7z_0$  が全体の critical layer の厚さになり、そ

のうち  $5z_0$  が  $\zeta=0$  の下側である。大気中の  $10\text{ km}$  の水平波長をもつ波に対して  $z_0=1\text{ m}$  となる。よって critical layer は  $7\text{ m}$  となる。また水中の  $10\text{ cm}$  の波長の波に対して  $z_0=0.2\text{ cm}$  となり、critical layer の厚さは  $1.4\text{ cm}$  となる。

## (iv) Critical level 近傍における乱れの発生

Critical layer の議論は大きく 2 つに分けられる。まず第 1 は線型理論に固執する限り、粘性の導入は不可避免的である。たゞし無限に小さな粘性を導入するだけで理論的な筋道は立つ。Hazel が示したように、粘性を導入すれば critical level のまわりに粘性の卓越した critical layer が生じるのはたしかである。Lindzen (1973) は Booker & Bretherton 流の critical layer 内での内部重力波の吸収は粘性を無限小にしたときの極限状態であると指摘している。粘性を導入することなしに critical layer 中の現象を考えるには非線型性を導入することである。Maslowe (1972) は非線型項を含めて計算を行っている。これによると critical level を中心にして薄い非線型性の卓越する層ができ、このために critical level の特異性は消失すると考えられている。このようにしてできる非線型の卓越した薄い層を critical layer とみなすならば、その内部で乱流によって波動のエネルギーが平均場に吸収されると考えることもできる。

Critical layer 中で起こる内部重力波の吸収の微細構造には、このように 2 つの場合が考えられる。これらの 2 つの構造は、相反するものではなくて、むしろ異なった状態でのそれぞれの側面をあらわしていると考えた方がよさそうである。



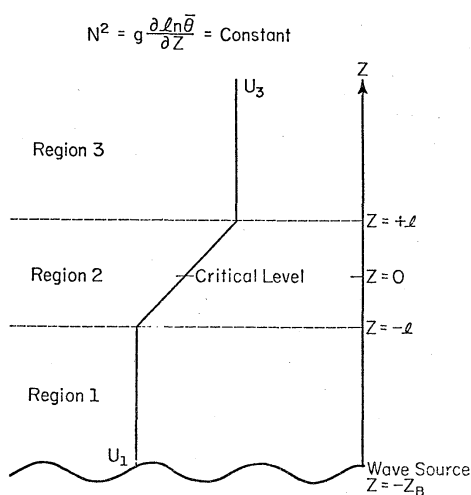
ある。

こゝで述べようとしていることは, Geller et al. (1975) あるいは Tanaka (1975a) によって最近研究されたものである。

Geller et al. (1975) は

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \left[ \frac{N^2}{(U-c)^2} - \frac{U_{zz}}{U-c} - k^2 \right] \hat{w} = 0 \quad (3-28)$$

から発展した。第4図に示されるような平均場を想定し,



第4図

$z = -z_B$  に波源を置く。Critical

level は  $z=0$  に設定してある。

Region 3 の上端では radiation

condition が使われている。こ

の境界条件と  $z=-l, l$  での接

続条件を使って (3-28) の解を

求める。連続の式, 温位の式

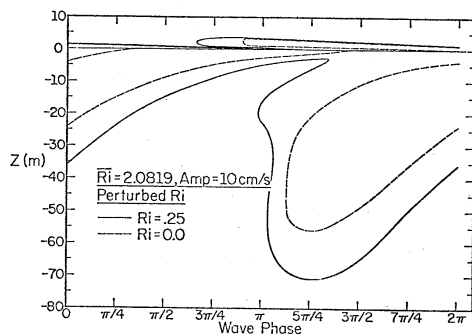
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = 0$$

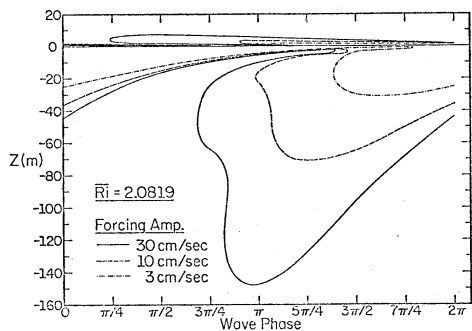
から,  $u, \theta$  が求まり, これより局所的 Richardson 数

$$Ri = \frac{g}{\theta_0} \frac{\frac{\partial}{\partial z}(\theta + \theta_0)}{\left[ \frac{\partial}{\partial z}(u + U) \right]^2} \quad (3-29)$$

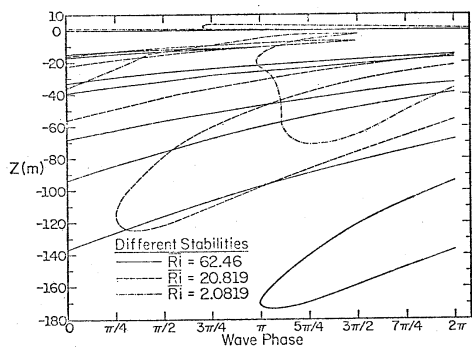
を求められる。



(a)



(b)



(c)

第5図

(a)  $Ri < 1/4$  および  $Ri < 0$  となる領域  
(b) 波動源の種の振巾に対する  $Ri < 1/4$  となる領域

(c) 基本場の種のRichardson数に  
対する  $Ri < 1/4$  となる領域

第5図(a)には、基本場の Richardson 数  $\bar{Ri} = 2.0819$ 、波源の振巾(風速の鉛直成分)が  $10 \text{ cm/sec}$  の場合に、局所的 Richardson 数  $Ri < 1/4$  および  $Ri < 0$  の範囲を1波長にわたって示したものである。Critical levelの下側に最大70mにおよぶ厚さをもつ不安定領域が現われている。

Critical levelの上側にはほとんど不安定領域は出現しない。第5図(b)には  $\bar{Ri}$  を一定にして、波源の振巾を変化させた場合の不安定領域 ( $Ri < 1/4$ ) を示してある。当然のことながら波源の振巾が小さくなるにつれて、不安定領域も薄くなる。第5図(c)は  $\bar{Ri}$  をいろいろ変化させて不安定領域の発生状況を示したものである。  $\bar{Ri}$  が

大きくなると不安定領域の包絡線は厚くなる。

不安定領域の包絡線の厚さは、波源の振巾( $a$ ),  $R_i$  および 水平波数( $k$ ) に関係する。Geller et al. はこれを具体的に計算した結果,  $R_i < 1/4$  とする領域の厚さ( $Z_{1/4}$ )は

$$Z_{1/4} \sim a^{\frac{2}{3}} R_i^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}} \quad (3-30)$$

で見積られる。

発生した薄い不安定領域の中では Kelvin-Helmholtz 不安定 (Tanaka, 1975b) のために乱れが発生する。このようにして critical level の近傍で乱れの層が形成される。

#### 4. おわりに

安定成層流体の不安定性の問題については枚挙にいとまのないほど多くの人々が研究しているので、この解説では特に強制問題に力点を置いた。この種の問題は乱れの cascade process と一脈通じるところがある。乱れは特殊な場合を除けば、大きなスケールから小さなスケールに崩壊して最後に粘性でおさえられる。内部重力波が critical level に近づくにつれて、波長の鉛直方向のスケールは次第に小さくなり、乱れが発生して、最終的には粘性でおさえられるだろう。

Critical level に関する強制問題は依然として多くの

註を含んでいる。

### References

- Booker, J.R. and F.P. Bretherton; *J. Fluid Mech.*, 27, 513 (1967)
- Bretherton, F.P.; *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 92, 466 (1966)
- Geller, M.A., H. Tanaka and D.C. Fritts; *J. Atmos. Sci.*, 32, 2125 (1975)
- Hazel, P.; *J. Fluid Mech.*, 30, 775 (1967)
- Howard, L.N.; *J. Fluid Mech.*, 10, 509 (1961)
- Jones, W.L.; *J. Fluid Mech.*, 34, 609 (1968)
- Lindzen, R.S.; *Boundary-Layer Meteor.*, 4, 327 (1973)
- Lindzen, R.S.; *J. Atmos. Sci.*, 31, 1507 (1974)
- Maslowe, S.A.; *Stud. in Appl. Math.*, 51, 1 (1972)
- Miles, J.W.; *J. Fluid Mech.*, 10, 496 (1961)
- Tanaka, H.; *J. Meteor. Soc. Japan*, 53, in press (1975a)
- Tanaka, H.; *J. Meteor. Soc. Japan*, 53, 1 (1975b)